Effet Zeeman.

Un électron de masse m, de charge $-e$, situé au point $M(t)$ est élastiquement lié à son noyau, considéré comme immobile au point O, par une force $\overrightarrow{f} = -m\,\omega_0^2\,\overrightarrow{r}$ où $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$. Il est soumis à un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B}_0 = B_0\,\overrightarrow{e_z}$. On néglige les phénomènes dissipatifs.

Question 1 :
Mettre en équation le mouvement. Quel est le mouvement selon Oz ?

On a

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -m\,\omega_0^2\,\overrightarrow{r} - e\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_0}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2\,\overrightarrow{r} - \frac{e\,B_0}{m}\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{e_z}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2\,\overrightarrow{r} - \omega_c\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{e_z}$$

où l'on reconnaît en $\omega_c = \frac{e\,B_0}{m}$ la «pulsation cyclotron».

On pose

$$\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

et l'on tire après des calculs de routine :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2\,x - \omega_c\,\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_0^2\,y + \omega_c\,\dot{x} \\ \ddot{z} = -\omega_0^2\,z \end{cases}$$

La troisième équation donne $z(t)$ sinusoïdal de pulsation ω_0.

Question 2 :
Pour le mouvement projeté sur le plan xOy, on cherchera une solution de la forme $x = A\,\exp(\jmath\,\omega\,t)$ et $y = B\,\exp(\jmath\,\omega\,t)$ et on trouvera deux valeurs pour ω (on simplifiera au premier ordre sachant que $\omega_c \ll \omega_0$) auxquelles on associera deux valeurs pour le rapport A/B, valeurs que l'on interprétera.

On reporte les expressions proposées dans les deux premières équations et l'on trouve, après simplification par l'exponentielle :

$$\begin{cases} 0 = (\omega^2 - \omega_0^2)\,A - \jmath\,\omega_c\,\omega\,B \\ 0 = \jmath\,\omega_c\,\omega\,A + (\omega^2 - \omega_0^2)\,B \end{cases}$$

Ce système en (A, B) admet la solution évidente $(0, 0)$ mais elle correspond au repos. Il n'y de solutions non nulles, donc de mouvement, que si le déterminant est nul soit :

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \omega_c^2\,\omega^2$$

équation bicarrée qui se dédouble en deux équations du second degré :

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm\,\omega_c\,\omega$$

dont on ne conservera que les solutions positives (par convention, les pulsations sont positives), soit

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\,\omega_0^2}}{2} \approx \omega_0 + \dfrac{\omega_c}{2} \\ \omega_2 = \dfrac{-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\,\omega_0^2}}{2} \approx \omega_0 - \dfrac{\omega_c}{2} \end{cases}$$

Pour chacune des solutions, le système qu'on a résolu entraîne que

$$B = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\jmath\,\omega_c\,\omega}\,A$$

Avec ω_1, qui est solution de $\omega^2 - \omega_0^2 = \omega_c\,\omega$, on a

$$B = \frac{\omega_c\,\omega}{\jmath\,\omega_c\,\omega}\,A = -\jmath\,A$$

et en choisissant l'origine des temps de sorte que A soit réel

$$\begin{cases} x(t) = \mathfrak{Re}\,[A\,\exp(\jmath\,\omega_1\,t)] = A\,\cos(\omega_1\,t) \\ y(t) = \mathfrak{Re}\,[-\jmath\,A\,\exp(\jmath\,\omega_1\,t)] = A\,\sin(\omega_1\,t) \end{cases}$$

où l'on reconnaît un mouvement circulaire dans le sens trigonométrique. Bien évidemment, avec $\omega = \omega_2$, on a un mouvement circulaire dans le sens horaire.

Pour résumer, le mouvement le plus général, à condition qu'il soit excité par l'agitation thermique (par exemple), est superposition d'un mouvement sinusoïdal selon Oz de pulsation ω_0 et de mouvements circulaires dans les deux sens du plan Oxy, respectivement de pulsations ω_1 et ω_2.

Question 3 :
Cet électron rayonne. Analyser la polarisation des trois rayonnements correspondant aux trois pulsations, d'une part dans la direction de Oz, d'autre part dans une direction du plan xOy, disons la direction de Ox.

Rappelons le cours : un dipôle oscillant $\overrightarrow{p} = p_0\,\cos(\omega\,t)\,\overrightarrow{u}$, situé en O, crée au point P (on note $\overrightarrow{OP} = r\,\overrightarrow{e_r}$) le champ électrique

$$\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{\sin\theta}{r}\,\omega^2\,p_0\,\cos(\omega\,(t - r/\mathrm{c}))\,\overrightarrow{e_\theta}$$

où θ est l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ est directement perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ dans le plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OP}$.

Pour le mouvement de pulsation ω_0, sinusoïdal selon Oz, on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_z}$

Pour un point de l'axe Oz, on a $\overrightarrow{OP} = r\,\overrightarrow{e_z}$ et donc $\theta = 0$: le champ rayonné est nul.

Pour un point de l'axe Ox, on a $\overrightarrow{OP} = r\,\overrightarrow{e_x}$ et donc $\theta = \pi/2$: le champ rayonné est maximal ; de plus, on se convainc aisément que $\overrightarrow{e_\theta} = -\overrightarrow{e_z}$ et donc l'onde est polarisée rectilignement selon Oz.

Pour le mouvement de pulsation ω_1 avec

$$\begin{cases} x(t) = A\,\cos(\omega_1\,t) \\ y(t) = A\,\sin(\omega_1\,t) \end{cases}$$

on peut considérer qu'on a un dipôle selon Ox en $\cos(\omega_1\,t)$ et un dipôle selon Oy en $\sin(\omega_1\,t)$.

Avec le même type de raisonnement pour un point de Oz le premier dipôle donne un champ maximum en cosinus selon $-\overrightarrow{e_x}$ et le second un champ maximum en sinus selon $-\overrightarrow{e_y}$ donc, au total, une polarisation circulaire directe. Bien sûr, le mouvement en ω_2 donnerait une polarisation circulaire indirecte.

Toujours avec le même type de raisonnement pour un point de Ox, le premier dipôle donne un champ nul et le second un champ maximum selon $-\overrightarrow{e_y}$, donc, au total, une polarisation rectiligne selon Oy. On aurait le même résultat pour le mouvement en ω_2.

Pour résumer, un présence d'un champ magnétique, la raie d'émission de l'électron de pulsation ω_0 se transforme en un triplet $\omega_2 = \omega_0 - \omega_c/2$, ω_0, $\omega_1 = \omega_0 + \omega_c/2$ de polarisation différentes. Dans la direction du champ, la raie centrale disparaît et les raies extrêmes sont polarisées circulairement en sens contraire. Dans une direction orthogonale au champ, les trois raies sont polarisées rectilignement, la centrale dans la direction du champ et les extrêmes dans la direction orthogonale.